

CALCULO DE LA CORRECCION TOPOGRAFICA A LAS OBSERVACIONES GRAVIMETRICAS EN LA CALDERA DEL TEIDE OBTENIDAS A PARTIR DEL MODELO TOPOGRAFICO DIGITAL DE LA ISLA DE TENERIFE

A.G. Camacho, C. de Toro y J. Fernández
Instituto de Astronomía y Geodesia . CSIC-UCM.
Facultad de Ciencias Matemáticas.
Universidad Complutense de Madrid.

Resumen.

Como se expuso en otra comunicación, se ha desarrollado un modelo digital topográfico de la Isla de Tenerife, una de cuyas aplicaciones es el cálculo de la corrección topográfica de las observaciones gravimétricas efectuadas en la Caldera del Teide y en zonas próximas. El método clásico, que utiliza ábacos a cuyos compartimentos deben asignarse altitudes medias a partir de la cartografía existente, resulta enormemente lento, penoso y no exento de posibles errores personales. Para obtener mayor precisión el modelo digital de la Isla obtenido a partir del 50.000 del Servicio Geográfico del Ejército, se ha suplementado en la zona de la Caldera con el 25.000 de dicha zona. Se presenta en esta comunicación el método y los resultados obtenidos, para la corrección topográfica, y la comparación de dichos resultados con los que se calculan a partir de emplear el método de Hammer en la primera campaña de observación. Como conclusión podemos decir que las anomalías obtenidas a partir del calculo automático, basado en el modelo digital, son del mismo orden de magnitud que las que se obtuvieron por el método del ábaco pero con la enorme ventaja de ganancia en tiempo y disminución de errores personales.

1. Introducción.

La mayor parte de las aplicaciones de los estudios gravimétricos exigen efectuar la reducción o corrección topográfica de las medidas. Dicha corrección representa los efectos gravitatorios de las masas topográficas sobre la estación gravimétrica

Generalmente se descompone dicho efecto en la atracción de una lámina (lámina Bouguer) plana o esférica que representa de forma simple las masas situadas entre el nivel del punto estación y la superficie de referencia (elipsoide, geoide), más el efecto de las masas (o defecto de masas) superficiales excedentes respecto al horizonte de la estación.

El cálculo de la atracción gravitatoria (en componente vertical) solo resulta sencillo para cuerpos geométricos simples, por lo que habitualmente se asimilan las masas topográficas a una yuxtaposición de figuras de tamaño y disposición adecuada que permitan el cálculo de este efecto topográfico.

El procedimiento tradicional de cálculo se establece dividiendo la topografía en figuras formadas por coronas circulares, planos horizontales y sectores circulares según el ábaco de Hammer, para el cual, determinada la altitud media de cada compartimento, las tablas correspondientes permiten determinar la componente de efecto topográfico. Las altitudes medias se

determinan superponiendo sobre un mapa topográfico de la zona una plantilla del ábaco de Hammer de la misma escala y analizando la topografía comprendida en cada compartimento. Dado que el cálculo de los efectos gravitatorios exige bastante más resolución en las zonas próximas que en las lejanas, y extendiéndose el ábaco de Hammer hasta los 14760 mts. de distancia de la estación, se hace necesario manejar mapas a diferentes escalas con sus correspondientes plantillas. Si se han de corregir las observaciones gravimétricas realizadas en bastantes estaciones de una zona el trabajo resulta largo, reiterativo y penoso.

En estas circunstancias hemos elaborado un método de cálculo automático de la corrección topográfica para una zona a partir de un modelo topográfico digital del terreno implicado. En particular se ha planteado el método para el levantamiento gravimétrico realizado por el Instituto de Astronomía y Geodesia en las Cañadas del Teide (Tenerife) (Vieira et al, 1988), formando previamente un modelo topográfico de la Isla y de su batimetría contigua.

2. Corrección topográfica.

El modelo topográfico de partida ha sido elaborado por predicción mínimos cuadrados a partir de una digitalización de mapas topográficos, y permite determinar la altitud correspondiente a cualquier punto del modelo con el correspondiente valor de la precisión (error medio cuadrático).

La aplicación más inmediata del modelo al cálculo de la corrección topográfica podría realizarse utilizando el ábaco de Hammer (tabla 1), determinando la altitud media de cada compartimento mediante el modelo digital. Dicha altitud media podría determinarse directamente calculando las altitudes del modelo de varios puntos homogéneamente distribuidos (según la función de covarianza del modelo) sobre el compartimento y calculando después su media. Tal vez de mejor calidad sea determinar la altitud media integrando sobre el compartimento A las fórmulas de predicción del modelo en la forma:

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \frac{1}{A} \iint_{P \in A} h(P) dx dy = \frac{1}{A} \iint_{P \in A} C_{Pl} (C_{ll} + C_{rr})^{-1} l dx dy = \\ &= \frac{1}{A} \left(\iint_{P \in A} C_{Pl} dx dy, \dots, \iint_{P \in A} C_{Pl} dx dy \right) (C_{ss} + C_{rr})^{-1} l\end{aligned}$$

donde A es la superficie del compartimento A y las C..indican matrices de varianza-covarianza para la observación (l), el ruido (r) o el punto P y los datos l. Y para cada punto dato i es :

$$\iint_{P \in A} C_{Pl} dx dy = \int_{\theta} \left(\int_r C(r) r dr \right) d\theta$$

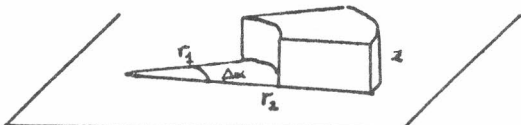
donde r, θ corresponden a un sistema de coordenadas polares con origen en el punto i, y C(r) es la función covarianza supuesta dependiente de la distancia plana.

En este sentido los cálculos resultan bastante engorrosos, por lo que hemos considerado otra posibilidad: determinar un ábaco diferente, más denso, de modo que para determinar la altitud media de cada compartimento sea

suficientemente preciso determinar la altitud de uno de sus puntos. En estas circunstancias los cálculos son mucho más sencillos: fijada una densidad de masa para los volúmenes superficiales y determinado el ábaco, para cada compartimento utilizado se determina la altitud del modelo por ejemplo en su punto central, y utilizando las formulas (1) de atracción de tales compartimentos calculamos el efecto gravitatorio. La corrección total será la suma de las correspondientes a cada compartimnto. Todo ello siempre en componentes de atracción vertical.

3. Determinación del ábaco.

La componente vertical de la atracción de un prisma de altitud z limitado por el sector de amplitud $\Delta\alpha$ respecto al punto estación y los círculos de radios r_1 y r_2 es:



$$\Delta g = G \rho \Delta\alpha \left({}_2r - {}_1r + \sqrt{z^2 + r_1^2} - \sqrt{z^2 + r_2^2} \right) \quad (1)$$

Figura 1. Compartimento.

donde $\Delta\alpha = 2\pi/n$, siendo el número de sectores en que se subdivide la corona limitada por los radios r_1 y r_2 , y ρ : densidad supuesta para las masas superficiales, z : altitud del nivel medio de la topografía en el compartimento respecto a la estación, G : constante de gravitación.

Diferenciando en (1) resulta:

$$\delta(\Delta g) = G \rho \Delta\alpha z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + r_2^2}} \right) \delta z \quad (2)$$

Supongamos por ejemplo $\rho = 2.3 \text{ gr/cm}^3$.

Debemos determinar un ábaco (valores r_1 , r_2 , $\Delta\alpha$) de modo que los errores $\delta(\Delta g)$ resultantes en la determinación del efecto de cada compartimento den lugar en total a un error menor que la tolerancia fijada para la determinación de la corrección topográfica de nuestro levantamiento. Por ejemplo deseamos obtener una precisión superior a medio milgal en el cálculo de la corrección. En estas circunstancias hay que averiguar como repercuten los errores δz de las altitudes del modelo sobre el valor $\delta(\Delta g)$ suponiendo unas condiciones bastante desfavorables en cuanto al terreno (valores z).

En cualquier caso podemos aun fijar un grado de libertad en la forma de los compartimentos: exigimos, por regularidad, que las magnitudes planas lado $r_2 - r_1$ y arco medio $\Delta\alpha r_{\text{med}}$ sean similares, mediante la condición:

$$\Delta\alpha = (r_2 - r_1) / \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)$$

que sustituimos en 2.

A mayor inclinación del terreno (mayor valor z) los efectos de δz son más grandes. Supondremos un caso desfavorable general admitiendo una pendiente de 45° hasta al menos un kilómetro de distancia mediante la condición:

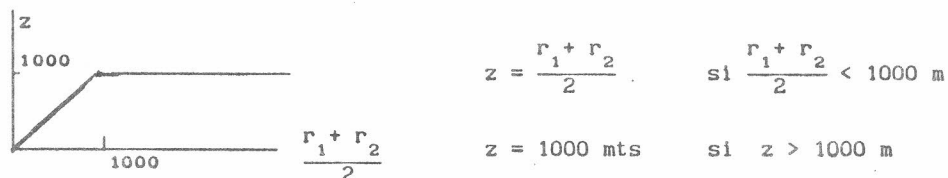


Figura 2. Inclinación topografía.

Analizaremos ahora los valores δz . Estos representan los errores de las altitudes medias de los compartimentos. Así pues, estarán constituidos por:

(a) Los errores provenientes de las altitudes del modelo de predicción. En (Camacho, 1988) el modelo digital de la isla de Tenerife se construye en tres pasos para su aplicación a la corrección topográfica en la Caldera del Teide: las zonas próximas (hasta 2000 mts.) a los puntos del levantamiento gravimétrico están digitalizadas a partir de un mapa 1:25000, obteniéndose un error medio cuadrático en las altitudes del modelo menor de 5 mts. La parte central de la Isla (distancias de hasta 6000 mts) procede de un 1:50000 con un e.m.c. de menos de 20 mts. Y el resto de la Isla y litorales procede de un 1:200000 resultando un e.m.c. de los puntos del modelo de 80 mts.

(b) La diferencia entre el valor puntual de altitud elegida y la media de las altitudes del compartimento. La media cuadrática de estas diferencias viene dada por la varianza de las altitudes en cada compartimento. Dicha varianza depende a su vez del tamaño ($r_2 - r_1$) del compartimento. Observando la fluctuación de las altitudes del modelo de Tenerife para varios tamaños de compartimentos obtenemos la gráfica de la figura 3, donde aproximadamente la desviación típica de las altitudes es del orden de la decena de la magnitud ($r_2 - r_1$), hasta alcanzarse valores estables en torno a 300 m (para $r_2 - r_1$ próximo a 3000 mts).

Sustituyendo $\Delta\alpha$ y las anteriores estimaciones de z y δz en (2) hemos obtenido por tanteo un ejemplo de ábaco (valor de $r_2 - r_1$ y número de sectores), donde cada compartimento puede ocasionar aproximadamente el mismo valor del error (0.01 mgal) y el error resultante no llega a 0.5 mgal. Ver tabla 2.

Señalemos que, como es claro, en la fórmula (1) de cálculo de corrección, los valores z de diferencia de altitud respecto a la estación se obtienen restando de las altitudes del modelo la altitud también del modelo para el punto estación (aunque esta pueda diferir de la altitud real de la estación conocida probablemente por otra vía). Añadamos además que las altitudes locales z para los puntos situados a pocos metros de la estación pueden proceder con ventaja de las propias anotaciones de campo.

En nuestro caso se ha supuesto densidad constante 2.3 gr/cm^3 . Puede sin embargo utilizarse de forma automática un modelo de densidades superficiales para la zona, efectuando el tratamiento de compartimentos para el ábaco usado.

4. Conclusiones.

El cálculo de la corrección topográfica de las medidas gravimétricas a partir de un modelo digital del terreno por el proceso indicado se realiza de forma automática, rápida y homogénea, permitiéndonos además tener indicaciones sobre la precisión de los resultados. En la tabla 3 figuran como ejemplo algunos puntos gravimétricos con sus correcciones y anomalías calculadas.

El presente trabajo se ha desarrollado en el Instituto de Astronomía y Geodesia dentro del proyecto de investigación "Estudio y evaluación de movimientos recientes de la corteza por métodos microgravimétricos y de Geodesia de precisión. Aplicación a zonas volcánicas en las Islas Canarias" que financia el C.S.I.C.

5. Referencias.

- Camacho A.G. "Modelo topográfico digital de la isla de Tenerife" Comun. VI Asam. Nac. Geod. y Geof. Madrid. 1988.
- Hammer S. "Terrain Corrections for Gravimeter Stations" Geophysics, vol.4, pp. 184-194. 1939.
- Vieira R., Toro C., Camacho A.G. "Estudio gravimétrico de la Caldera del Teide" comun. VI Asam. Nac. Geod. y Geof. Madrid. 1988.

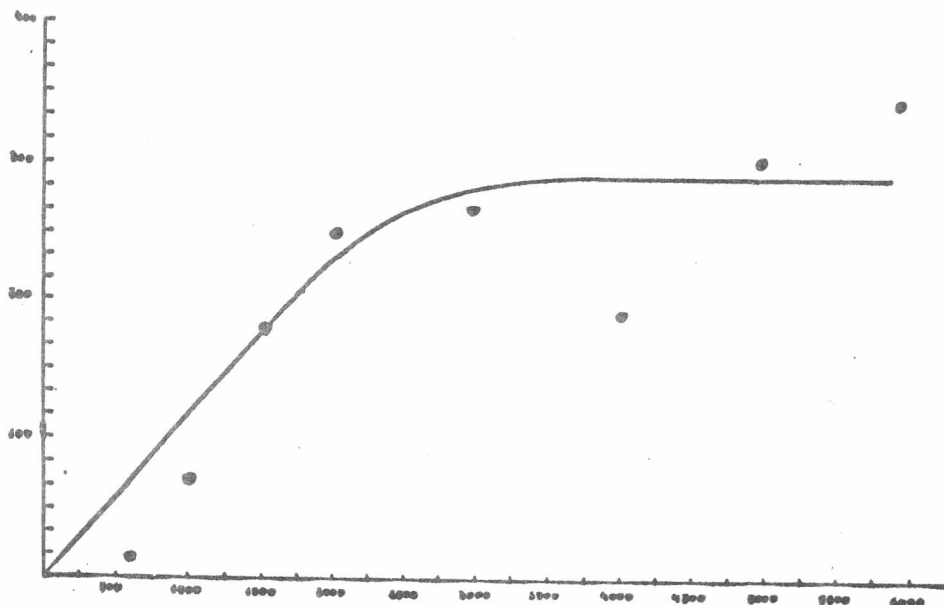


Figura 3. Desviaciones típicas de las altitudes para diversos tamaños de los compartimentos.

- Tabla 1. ABACO DE HAMMER

RADIO INT (mts)	RADIO EXT (mts)	NUM SECT.
0	57	6
57	165	6
165	391	8
391	895	8
895	1530	12
1530	2616	12
2616	4470	12
4470	6665	16
6665	9925	16
9925	14760	16
TOTAL 112		

Tabla 2. ABACO USADO

RADIO INT.(mts)	RADIO EXT.(mts)	NUM SECT.	ERROR (mgal)
3	7	7.9	0.01
7	14	9.4	0.01
14	27	9.9	0.01
27	50	10.5	0.01
50	95	10.6	0.01
95	163	12.1	0.01
163	256	14.3	0.01
256	378	16.0	0.01
378	534	18.4	0.01
534	727	20.5	0.01
727	962	22.6	0.01
962	1248	24.3	0.01
1248	1580	26.8	0.01
1580	1970	28.5	0.01
1970	2420	30.6	0.01
2420	2960	31.3	0.01
2960	3600	32.2	0.01
3600	4370	32.5	0.01
4370	5290	33.0	0.01
5290	6400	33.0	0.01
6400	7730	33.4	0.01
7730	9330	33.5	0.01
9330	11300	32.9	0.01
11300	13630	33.6	0.01
13630	16440	33.6	0.01
TOTAL 593			
E.M.C. RESULTANTE			0.24 mgal

(DENSIDAD DE MASA SUPUESTA= 2.30 GR./ CM³ ANCM MEDIA REGIONAL SUPUESTA= 200.00 MGAL)
(CORREL TIPOG CALCULADA PREVIAM SOBRE MODELO DIGITAL DEL TERRENO)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

NUM EST	ESTACION DENOM	X	UTM (MTS) Y	MU	H	GRAV OBS GAL	AN A. L. MGAL	AN BOUG MGAL	AN TOP MGAL	AN RES MGAL
246	SSA 63,5	330570.0	3139016.2	28	327.1	979.33706	238.72	207.19	215.93	15.93
250	NGR 199	325266.5	3137677.8	28	620.1	979.28504	278.09	218.30	225.80	25.80
304	LA GUANCHA IG	338256.2	3139586.6	28	490.1	979.430293	254.44	207.18	215.13	15.13
305	REDONDO IG	334453.0	3136314.5	28	777.0	979.24787	290.17	215.25	224.60	24.60
328	LA PERDIDA IG.	347935.2	3139980.3	28	458.1	979.31740	258.67	214.50	221.34	21.34
329	PALL BLANCO IG	345405.3	3138628.4	28	665.0	979.27031	276.37	212.26	220.99	20.99
332	K-15 TEIDE URTA	330554.3	3136685.1	28	1281.1	979.14784	345.27	221.75	230.58	30.58
334	BAR LAS CANAJAS	346630.2	3131962.6	28	2035.3	978.98739	420.68	224.44	230.32	30.32
335	K-39 LAGUNA TEID	330032.9	3131672.2	28	2238.6	978.93504	431.19	215.35	221.82	21.82
336	TAJEA PRX RTVE	331606.2	3131529.6	28	2290.1	978.92029	432.41	211.60	220.62	20.62
404	CHIO-TEIDE POLEO	327170.9	3130076.6	28	1446.8	979.11532	368.58	229.08	236.75	36.75
407	K-9 CHIO-CANAJAS	330643.4	3128979.7	28	1805.0	979.04243	406.89	232.84	238.17	38.17
408	LNO K18,3 CANADA	320762.1	3126419.4	28	1260.0	979.15419	352.31	230.82	236.17	36.17
409	K5,9 CHIO-CANADA	331782.3	3126624.6	28	1950.0	979.00856	419.32	231.30	237.06	37.06
421	CHIL-CANAJAS CA	327940.7	3123075.7	28	1025.3	979.21351	341.49	242.63	250.37	50.37
431	NGR 224	320438.5	3120666.6	28	584.5	979.30050	294.11	237.76	245.15	45.15
432	TELEFERICO ENTUA	340638.5	3126318.1	28	2355.6	978.90894	444.89	217.77	228.44	28.44
433	K-3 CHIO-TEIDE	333526.5	3124567.2	28	2085.5	978.95360	447.52	246.44	251.20	51.20
434	P CANAJAS CANAJA	340311.5	3122993.4	28	2152.1	978.97134	446.80	239.30	244.51	44.51

Tabla 3. Ejemplo cálculo de anomalías